Convergence des éléments finis de poutres et optimisation de maillages.

Dans ce travail, on se propose de découvrir la loi de convergence des éléments finis de type poutre. Pour cela, on utilise le problème d'une poutre encastée chargée de façon non uniforme (Figre 1 avec τ fonction de x', $M = T = 0$).

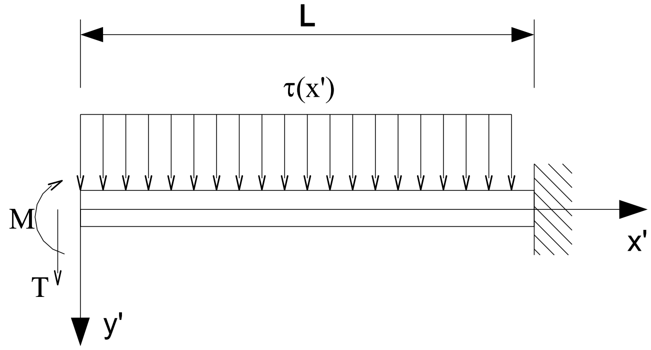

FIG. 1 – Poutre chargée et fixée en $x' = L$.

Q1 (50 Pts.) : Calculez la solution éléments finis de ce problème pour des maillages uniformément raffinés : 1, 2, 4, 8, ... et 256 éléments pour $\tau = x'$. Vous pouvez, soit implémenter la matrice de raideur d'une poutre dans le programme en C `Treillis.c` mis à votre disposition, soit écrire un autre programme en MATLAB, C++, FORTRAN ou autre. Pour chacune de ces solutions numériques, tracez un graphe du moment de flexion $M_{ef}(x')$ et comparez le avec la solution exacte $M_{ex}(x')$.

Q2 (50 Pts.) : Pour chacune des solutions, l'énergie de déformation U du système s'crit :

$$U = \sum_{barres} \int_{barre} \frac{M_{ef}^2}{2EI} dx'.$$

On dfinit $e = M_{ef} - M_{ex}$ comme l'erreur locale de discrétisation c'est-à-dire l'erreur de la méthode numérique. Calculez, pour chacun des maillages l'énergie de déformation de l'erreur :

$$E^2 = \sum_{barres} \int_{barre} \frac{e^2}{2EI} dx'.$$

Tracez ensuite un graphe de E en fonction de la taille h de mailles (pour un maillage uniforme de N éléments, la taille de maille est $h = L/N$). L'erreur de discrétisation E d'une méthode d'éléments finis s'écrit $E = Ch^p$. Calculez le taux de convergence p de la méthode.

Q3 (20 Pts.) : Connaissant le taux de convergence et l'erreur de discrétisation sur chaque barre, imaginez une méthode pour construire un maillage optimum i.e. trouvez une distribution optimale des tailles de mailles pour obtenir une erreur E minimale pour un nombre d'éléments donné.