1 Disposition rationnelle des appuis des poutres

1.1 Énoncé

Du point de vue de l'économie des matériaux, la disposition correcte des appuis des poutres a une importance capitale si les considérations de production ou d'autres genres n'y font pas obstacle.

Pour une poutre simple de longueur $l = 2$ reposant sur ses extrémités et soumise à une charge uniformément répartie $p = 1$ (les valeurs $l = 2$ et $p = 1$ permettent des calculs plus simples sans perte de généralité), le moment fléchissant fonction de x vaut

$$M(x) = x^2/2$$

si bien que le moment maximal a lieu au milieu de la travée et vaut $M_{max}(1) = 1/2$.

Pour une poutre de même longueur mais en présence de consoles , le moment fléchissant est plus petit.

Calculez la position $x = \xi$ des consoles pour obtenir un moment fléchissant minimum. Cette position correspond-elle à une flèche minimale ? Si non, trouvez la position des appuis correspondant à une flèche minimum.

1.2 Solution

On ne considère que la partie gauche de la structure ($0 \leq x < 1$). Le moment féchissant y vaut

$$M^0(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{si } \; 0 \leq x < \xi \\ -\frac{x^2}{2} + (x - \xi) & \text{si } \; \xi \leq x < l \end{cases}$$

Le moment fléchissant maximum M_{max} peut être situé soit en $x = \xi$ ou il vaut $M_{max} = -\xi^2/2$, soit en $x = 1$ ou il vaut $M_{max} = 1/2 - \xi$. Nous cherchons à minimiser $|M_{max}|$ et ce minimum a lieu quand le moment dans la section d'appui est égal au moment maximal dans la travée (cfr. Figure 1)

$$\xi^2 + 2\xi - 1 = 0$$

ce qui donne

$$\xi = -1 \pm \sqrt{2}.$$

La seule valeur possible pour ξ est celle comprise entre 0 et 1 c'est-à-dire

$$\xi = -1 + \sqrt{2} = 0.414.$$

La position optimale de l'appui se situe donc un peu avant le quart de la poutre et le moment maximal M_{max} ainsi obtenu est égal à $M_{max} = 1.5 - \sqrt{2} = 0.085$. Cette valeur rend possible une réduction du moment fléchissant d'un facteur 6 par rapport à la valeur $M_{max} = 0.5$ trouvée plus haut.

Calculons maintenant la déflexion maximale de la structure. On envisage naturellement les points $x = 0$ et $x = 1$. L'application d'une force unité en $x = 0$ donne un moment r ésultant de

$$m^0(x) = \begin{cases} -x & \text{si } \; 0 \leq x < \xi \\ -\xi & \text{si } \; \xi \leq x < 1 \end{cases}$$

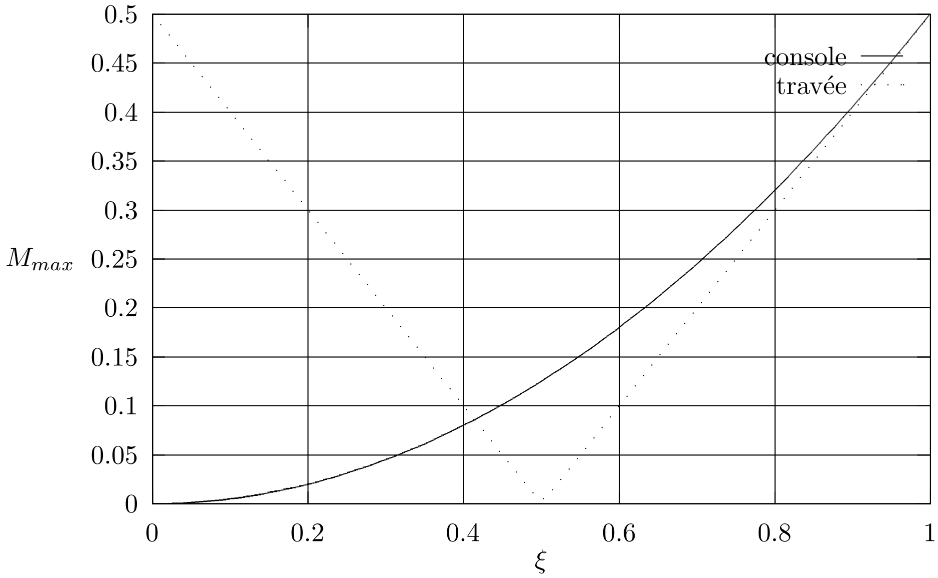

FIG. 1 – Moments maximums (en valeur absolue) dans la travée et dans la console en fonction de ξ.

Le théorème de la force unité donne :

$$\begin{aligned} 2EI\delta^0(\xi, x=0) &= \int_0^\xi x^3 dx + \int_\xi^1 x^2 \xi dx - 2\int_\xi^1 (x-\xi)\xi dx \\ &= -\xi^4/12 + \xi/3 - (1-\xi)^2\xi \qquad (1) \end{aligned}$$

Notons que la fonction (1) s'annule en un point autre que $\xi = 0$: $\delta^0(\xi, x = 0) = 0$. Il correspond au cas ou la flèche négative due à la console est égale à la flèche positive due à la travée.

En ce qui concerne la flèche en $x = 1$, l'application d'une force unité en $x = 1$ donne un moment résultant de

$$m^0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le x < \xi \\ x - \xi \text{ si } \xi \le x < 1 \end{cases}$$

Le théorème de la force unité donne :

$$\begin{aligned} 2EI\delta^0(\xi, x=1) &= \int_\xi^1 (-x^2 + 2(x-\xi))(x-\xi) dx \\ &= -1/4 - \xi^4/12 + \xi/3 + 2(1-\xi)^3/3 \qquad (2) \end{aligned}$$

Encore une fois, la flèche s'annule pour un point autre que $\xi = 1$. On trace les courbes correspondant aux équations (1) et (2) sur la Figure 2. La valeur optimale de l'appui pour minimiser la flèche est $\xi = 0.446$. Pour cette longueur de console, la flèche maximale de la poutre est réduite d'un facteur 13.7 par rapport à la poutre sans console.

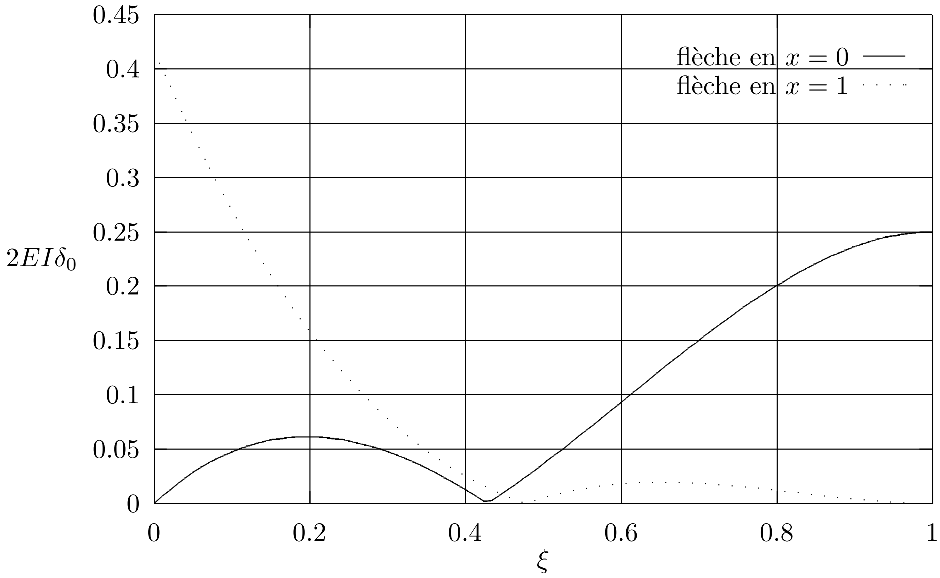

FIG. 2 – Flèches maximales (en valeur absolue) en $x = 0$ et $x = 1$.